



گزینه ۲

۱

می‌دانیم $f'(x) = 2x^2$ است. حال داریم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\underbrace{\frac{x - 2}{f(x) - f(2)}}_{\frac{1}{f'(2)}} \times (x + 2) \right) = \frac{4}{f'(2)}$$

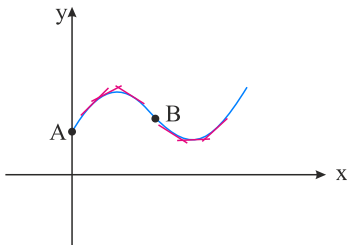
$$f'(x) = 2x^2 \xrightarrow{x=2} f'(2) = 2(4) = 8$$

ما حاصل $\frac{4}{f'(2)}$ را می‌خواهیم که برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

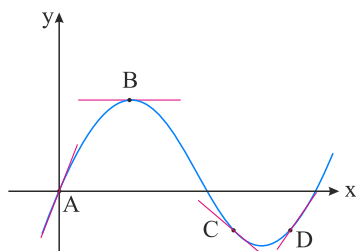
گزینه ۳

۲

باتوجه به شکل مقدار مشتق تابع $y = f(x)$ که همان شیب خط مماس است از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌یابد و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



می‌دانیم $f'(x)$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول x است. به جدول توجه کنید.



نقطه	علامت f	علامت f'	علامت $f(x)f'(x)$
A	◦	+	◦
B	+	◦	◦
C	-	-	+
D	-	+	-

پس در نقطه D ، $f(x)f'(x) < 0$ است.

$$g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)[f(x)] - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)[f(x)] = 2 \times [2^-] = 2 \times 1 = 2$$

اولاً $f(1) = 1$ است. ثانیاً شیب خط مماس برابر $-\frac{1}{2}$ می‌باشد، پس $f'(1) = -\frac{1}{2}$ است:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = -\frac{1}{2}$$

ما حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{x - 1}$ را می‌خواهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{x - 1} \times \frac{f(x) + \sqrt{f(x)}}{f(x) + \sqrt{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x)}{(x - 1) \times \underbrace{f(1) + \sqrt{f(1)}}_2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2} \times \underbrace{\left(\frac{f(x) - 1}{x - 1} \right)}_{f'(1)} = \frac{f(1)}{2} \times f'(1) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + 1}{x^3 + 8} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + 1}{x + 2} \times \frac{1}{x^2 - 2x + 4} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \times \frac{1}{x^2 - 2x + 4} = f'(-2) \times \frac{1}{12} = 2 \Rightarrow f'(-2) = 24$$

نکته: چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و حد داده شده برابر با ۲ است و مخرج به ازای $x = -2$ صفر می‌شود پس صورت نیز برابر با صفر است تا حد با رفع ابهام $\frac{0}{0}$ محاسبه شود. پس $f(-2) + 1 = 0$ و در نتیجه $f(-2) = -1$ خواهد بود.

برای محاسبه عبارت خواسته شده، به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2-3h)}{h(h-1)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(-2+h) - f(-2)) - (f(-2-3h) - f(-2))}{h(h-1)} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-1} \times \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2-3h) - f(-2)}{-3h} \right) \\ &= -1(f'(-2) + 3f'(-2)) = -4f'(-2) = -4(24) = -96 \end{aligned}$$

روش دوم:

نکته: اگر f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{h} &= (m-n)f'(a) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2-3h)}{h(h-1)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-1} \times (1 - (-3))f'(-2) \\ &= -4f'(-2) = -4 \times 24 = -96 \end{aligned}$$

باتوجه به شکل $f(-2) = 2$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ چون f از $(-2, 2)$ می‌گذرد و شیب خط مماس بر f در $x = -2$ برابر $-\frac{1}{4}$ است:

$$\begin{aligned} g'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{x}{f(x)} + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + f(x)}{(x + 2)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2 + f(x) - 2}{(x + 2)f(x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)} \left(1 + \frac{f(x) - 2}{x + 2}\right) = \frac{1}{4} (1 + f'(-2)) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

الف) نادرست است، شیب منحنی در A ، B و E مثبت است، بنابراین در ۳ نقطه شیب مثبت داریم.
ب) درست است.

ج) مقدار مشتق از A به B و C در حال کاهش است ولی از C به D زیاد می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود، پس نادرست است.

د) درست است، منفی‌ترین شیب بین نقاط مشخص شده مربوط به C است.

نکته: در نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، چون خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است، شیب مماس بر نمودار سهمی در نقاط هم‌عرض، قرینه یکدیگرند.

در اینجا نقاط با طول $4 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{2}$ باید هم‌عرض باشند و خط $x = -\frac{b}{2a}$ وسط این دو نقطه:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{1 + \sqrt{2} + 4 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5a + b = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 3)\sqrt{x+3} - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)\sqrt{x+3}}{\cancel{x-1}} = (1+3)(2) = 8, \quad A(1, 0)$$

$$y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2$$

عرض از مبدأ: ۴

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{2x} \xrightarrow{x_A=1} y_A = \frac{\sqrt{1+3}}{2(1)} = 1$$

$$m_{\text{ماس}} = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{x+3}}{2x} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{x+3} - 2x}{2x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{2x(x-1)} \times \frac{\sqrt{x+3} + 2x}{\sqrt{x+3} + 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{x+3} - 2x}{2x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2x)}}{1} = \frac{-1}{8} \Rightarrow m_{L_v} = \frac{1}{8}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1}$$

$$= \frac{(1+h)^2 - 3(1+h) - (-2)}{h} = \frac{1+2h+h^2-3-3h+2}{h}$$

$$= \frac{h^2 - h}{h} = \frac{h(h-1)}{h} = h - 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)g(1) - f(1+h)g(1+h)}{3h^2 - 2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{h(3h - 2)}$$

حد عبارت $(3h - 2)$ وقتی $h \rightarrow 0$ برابر -2 است، لذا:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{h(3h - 2)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{-2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1)}{h} = \frac{1}{2} (fg)'(1) \end{aligned}$$

باتوجه به تقارن توابع درجه دوم نسبت به خط محور تقارن، اگر دو نقطه نسبت به محور تقارن، متقارن باشند، شیب خط مماس در آن نقاط، قرینه هم خواهد بود؛ پس:

$$\left. \begin{aligned} f'(a) + f'(b) &= 0 \Rightarrow f'(a) = -f'(b) \\ \text{محور تقارن: } x &= \frac{-1}{-\frac{1}{4}} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 4 \Rightarrow a+b = 8$$

ابتدا عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \frac{1 - (-1)}{1} \times f'(x) = 2f'(x)$$

$$\Rightarrow 2f'(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{4^2}{2} + 4 = 12$$